《微积分（甲）Ⅰ》

2021-2022 学年第一学期期末考试 A 卷

1.求反常积分 $I=\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$.

2.计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^7+x^6)^{\frac{1}{7}}-(x^7-x^6)^{\frac{1}{7}}\right]$.

3.求不定积分 $\int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx$.

4.(1)证明：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$，$x>0$；

(2)求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

5.求 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，$x\in[0，1]$的弧长.

6.$\ln\cos x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o(x^4)$，求 a_0，a_1，a_2，a_3，a_4.

7.求 $f(x)=-3x^5+5x^3+2$ 的所有极值.

8.设 $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$， $\frac{d^2y}{dx^2}$.

9.已知 $f(x)$ 为 $(0，+\infty)$ 上的连续函数，且存在唯一极值点，证明：若 $f(x)$ 存在极大值点 x_0，则 x_0 也为 $f(x)$ 的最大值点.

10.设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，且在 $(0, +\infty)$ 上可导，对于 $\forall x \in (0, +\infty)$，$f'(x) > 1$，$f(0) < 0$，

证明：$f(x) = 0$ 在 $x > 0$ 时有且仅有唯一解.

11.设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续，有 x_1，x_2，$x_3 \in (0, 1)$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$ 都有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

证明：$a_n = (n+2)\left[f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$ 收敛.

12.设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且可导，当 $x \in [0, 1]$ 时，$\int_x^1 f(x)dx \geqslant \frac{1 - x^3}{2}$，证明：

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx > \frac{5}{12}.$$

2021-2022 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

1.【解析】令$t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2$，则$I=\int_0^{+\infty}2te^{-t}dt=-2\int_0^{+\infty}tde^{-t}=-2te^{-t}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$

$=-2e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=2.$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 定积分 第三部分 反常积分

2.【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^7+x^6)^{\frac{1}{7}}-(x^7-x^6)^{\frac{1}{7}}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[7]{1-x}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt[7]{\frac{1+x}{1-x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{7}\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}{7x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{2x}{1-x}}{7x}=\dfrac{2}{7}.$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算

3.【解析】$\int\dfrac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx=\int\dfrac{1}{(1+\cos x)\sin x}dx+\int\dfrac{1}{1+\cos x}dx$

$\int\dfrac{1}{(1+\cos x)\sin x}dx=\int\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)\cdot2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}dx$

$=\int\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}dx+\int\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{4\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}dx=\int\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{4\cos^3\frac{x}{2}}dx+\int\dfrac{1}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$

$=-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{\cos^3\frac{x}{2}}d\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{\sin x}dx=\dfrac{1}{4}\sec^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+c_1,$

$\int\dfrac{1}{1+\cos x}dx=\int\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\dfrac{1}{2}\int\sec^2\dfrac{x}{2}dx=\tan\dfrac{x}{2}+c_2$，因此

$$\int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx=\frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+C.$$

($\dfrac{1}{4}\tan^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+\tan\dfrac{x}{2}+C$ 也对，原因是$\tan^2\dfrac{x}{2}+1=\sec^2\dfrac{x}{2}$.)

【考点延伸】《考试宝典》专题四 不定积分 第二部分 换元积分法 2.1、第一类换元积分法

4.【解析】(1)令$f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$，$x>0$，则$f'(x)=\dfrac{x^2}{1+x}>0$对$x>0$恒成立，则$f(x)>f(0)=0$，则$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)$；再令$g(x)=x-\ln(1+x)$，$x>0$，得到$g'(x)=\dfrac{x}{1+x}>0$对$x>0$恒成立，因此$g(x)>g(0)=0$，即$\ln(1+x)<x$，综上所述$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$，$x>0$.

(2)令$x_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$，则$\ln x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)$，当$x>0$时，得到

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$$

则$\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$；

另一方面，$\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}-\frac{i^2}{2n^4}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^2}{2n^4}$

$=\frac{n+1}{2n}-\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2n^4}=\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$，那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\right)=\frac{1}{2}$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n}=e^{\frac{1}{2}}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算

5.【解析】有$y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，利用弧长公式得到

$$s=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}}\,dx=\int_0^1(e^x+e^{-x})\,dx=(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=e-\frac{1}{e}.$$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 定积分 第四部分 几何应用 4.3、弧长

6.【解析】将$f(x)=\ln\cos x$在点$x=0$处展开，有$f(0)=0$，$f'(0)=f'(x)\big|_{x=0}=-\frac{\sin x}{\cos x}\Big|_{x=0}=0$，

$f''(x)\big|_{x=0}=-\sec^2x\big|_{x=0}=-1$，$f'''(x)\big|_{x=0}=-\sec^2x\cdot\tan x\big|_{x=0}=0$，

$f^{(4)}(x)\big|_{x=0}=-2\sec^4x-4\sec^2x\tan x\big|_{x=0}=-2$，因此$a_0=f(0)=0$，$a_1=\frac{f'(0)}{1!}=0$，$a_2=\frac{f''(0)}{2!}$

$=-\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{f'''(0)}{3!}=0$，$a_4=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-\frac{1}{12}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 导数的应用、中值定理 第三部分 中值定理 3.4、泰勒中值定理

7.【解析】令$f'(x)=-15x^4+15x^2=0$得到$x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$.

区间	$(-\infty,\ -1)$	-1	$(-1,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$
$f'(x)$的正负	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$的单调性	减少	极小值	增加	非极值点	增加	极大值	减少

因此函数的极大值为$f(1)=4$，极小值为$f(-1)=0$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 导数的应用、中值定理 第一部分 极值、最值和凹凸性 1.1、极

值点

8.【解析】有 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t) \\ \dfrac{dt}{dt}=e^t(\sin t+\cos t) \end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$；

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}{(\cos t-\sin t)^2e^t(\cos t-\sin t)}=\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.3、参数方程求导

9.【解析】用反证法可以来说明.如果 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 上的最大值，

则必存在 $x_1\in(0,\ +\infty)$，使 $f(x_1)>f(x_0)$，不妨设 $x_1>x_0$. 由连续函数在闭区间上的性质，存在 $\xi\in[x_0,\ x_1]$ 使得 ξ 为 $f(x)$ 在 $[x_0,\ x_1]$ 上的最小值点，显然 $\xi\neq x_1$.又因为 x_0 为极大值点，存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$，使得当 $x\in U(x_0)\cap[x_0,x_1]$ 时，$f(x)<f(x_0)$.这说明 $f(x_0)$ 不是 $[x_0,x_1]$ 上的最小值，故 $\xi\neq x_0$，即 $\xi\in(x_0,x_1)$. 因此，ξ 为 $(0,\ +\infty)$ 上的一个极小值点，这与 x_0 是唯一极值点相矛盾.

故 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 上的最大值

【考点延伸】《考试宝典》专题三 导数的应用、中值定理 第一部分 极值、最值和凹凸性 1.1、极值点 1.2、最值

10.【解析】由于 $\forall x\in(0,\ +\infty)$，$f'(x)>1$，说明 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调增加，又 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上可导，取 $b>0$，在 $(0,\ b)$ 上利用拉格朗日中值定理可知存在 $\xi\in(0,\ b)$，成立

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(0)}{b}>1$$

得到 $f(b)>b+f(0)$，由于 $f(0)<0$，则当 $b\to+\infty$ 时，必定成立 $f(b)>b+f(0)>0$，那么成立 $f(b)\cdot f(0)<0$，则在 $(0,\ b)$ 上存在至少一个零点，由于 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调增加，因此有 $f(x)=0$ 在 $x>0$ 时有且仅有唯一解.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 导数的应用、中值定理 第三部分 中值定理 3.2、拉格朗日中值定理

11.【解析】令 $x_3>x_2=\dfrac{1}{2}>x_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}$，依据题意可以得到

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{2}-x_1}=\frac{f(x_1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x_1-\frac{1}{2}}>\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}>\frac{f(x_3)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x_3-\frac{1}{2}}$$

由于$x_1<x_3$，说明$\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$单调减少且又下界，由单调有界原理可知极限$\lim\limits_{x_1\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{2}-x_1}$

存在，那么$\lim\limits_{x_1\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{2}-x_1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)}{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，则$\{a_n\}$收敛.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 【重要题型】 题型 3：证明数列极限存在（单调有界定理的运用）

12.【解析】令$F(x)=\int_x^1 f(t)dt$，则$\int_0^1 F(x)dx\geqslant\int_0^1\frac{1-x^3}{2}dx=\frac{3}{8}$，另一方面有，$\int_0^1 F(x)dx=$

$xF(x)\big|_0^1-\int_0^1 xdF'(x)=F(1)+\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$，因此有$\int_0^1 xf(x)dx\geqslant\frac{3}{8}$，利用柯西不等式可以得到

$$\int_0^1 x^2dx\int_0^1[f(x)]^2dx\geqslant\left[\int_0^1 xf(x)dx\right]^2\geqslant\frac{9}{64}$$

则$\int_0^1[f(x)]^2dx\geqslant\frac{27}{64}>\frac{5}{12}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题五 定积分 专题四 不定积分 第三部分 分部积分法